

## Kehäkulmalauseesta on moneksi

1. *Thaleen lause.*  $\angle ACB$  on suora, jos ja vain jos  $C$  on  $AB$ -halkaisijaisella ympyrällä.

2. *Kehäkulmalause.* Jos  $A, B, C$  ja  $D$  ovat ympyrän  $\Gamma$  pisteitä ja  $C$  ja  $D$  ovat samalla puolella suoraa  $AB$ , niin  $\angle ACB = \angle ADB$ . Jos  $A, B$  ja  $C$  ovat ympyrällä  $\Gamma$  ja  $D$  on samalla puolella suoraa  $AB$  kuin  $C$  ja  $\angle ADB = \angle ACB$ , niin  $D$  on ympyrällä  $\Gamma$ . Jos  $F$  on ympyrän  $\Gamma$  pisteeseen  $B$  piirretyn tangentin piste,  $A \neq B$  jokin  $\Gamma$ :n piste ja  $C$   $\Gamma$ :n piste, joka on eri puolella suoraa  $AB$  kuin  $F$ , niin  $\angle ACB = \angle ABF$ .

3. *Jännelikulmio.* Jos  $A, B, C$  ja  $D$  ovat ympyrällä  $\Gamma$  tässä järjestyksessä, niin  $\angle CAD$  ja  $\angle BCD$ :n vieruskulma ovat yhtä suuria. Jos  $ABCD$  on kupera nelikulmio ja  $\angle CAD$  ja  $\angle BCD$ :n vieruskulma ovat yhtä suuret, niin nelikulmion  $ABCD$  ympäri voidaan piirtää ympyrä.

4. *Sinilause.* Jos kolmion  $ABC$  ympärysympyrän säde on  $R$ , niin

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c} = \frac{1}{2R}.$$

( $a, b, c$  kolmion sivut ja  $\alpha, \beta, \gamma$  vastinkulmat.)

5. *Sinin yhteenlaskukaava (syrjähyppy).*  $\sin(\gamma + \beta) = \sin \gamma \cos \beta + \cos \gamma \sin \beta$ .

6. Teräväkulmaisen kolmion  $ABC$  korkeusjanojen leikkauspiste  $H$  [kolmion  $ABC$  ortokeskus] on korkeusjanojen kantapisteiden muodostaman kolmion  $A'B'C'$  sisäympyrän keskipiste. Tylppäkulmaisen kolmion ortokeskus on kolmion yhden sivu ympyrän [ympyrä, joka sivuaa yhtä kolmion sivua ja kahden muun jatketta] keskipiste.

7. Olkoon  $A'B'C'$  pisteen  $P$  pedaalikulmio kolmion  $ABC$ :n suhteen [kolmio, jonka kärjet ovat  $P$ :n kohtisuorat projektiot  $ABC$ :n sivuille],  $A''B''C''$   $P$ :n pedaalikulmio  $A'B'C'$ :n suhteen ja  $A'''B'''C'''$   $P$ :n pedaalikulmio  $A''B''C''$ :n suhteen. Silloin  $ABC$  ja  $A'''B'''C'''$  ovat yhdenmuotoisia.

8. *Pisteen potenssi.* Jos  $P$  on piste, joka ei ole ympyrällä  $\Gamma$  ja jos  $P$ :n kautta kulkevat suorat leikkaavat  $\Gamma$ :n pisteissä  $A, B$  ja  $C, D$ , niin  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ .

9. *(Eräs) Eulerin kaava.* Kolmion  $ABC$  sisäympyrän ja ympärysympyrän keskipisteiden  $I$  ja  $O$  välinen etäisyys on

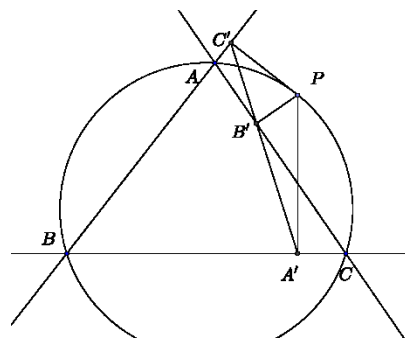
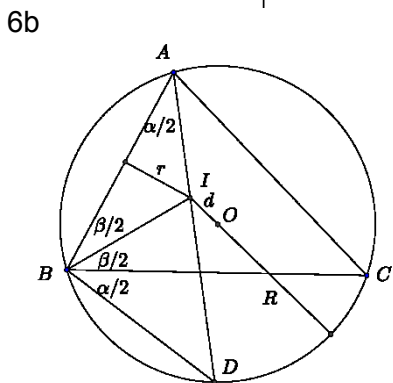
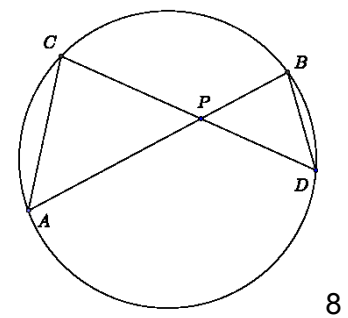
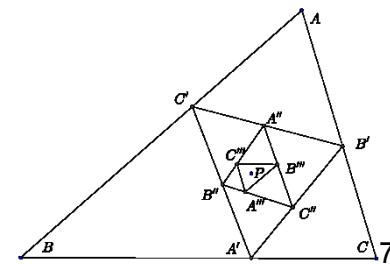
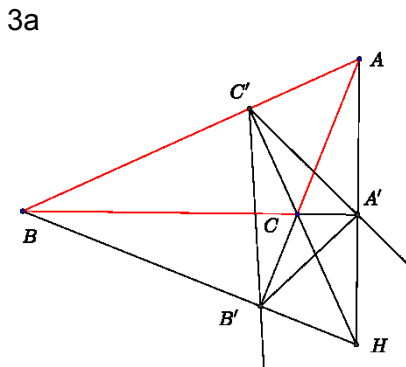
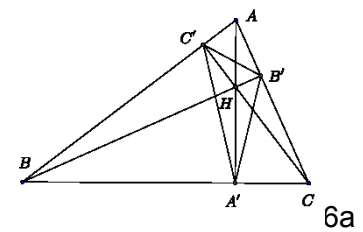
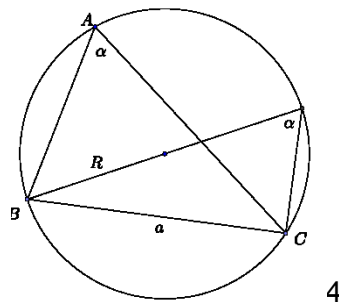
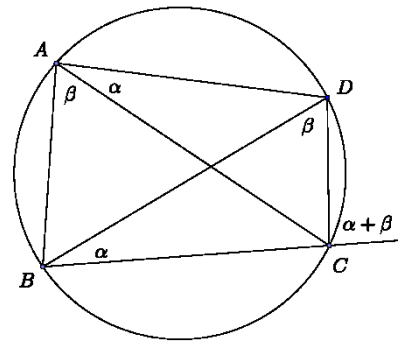
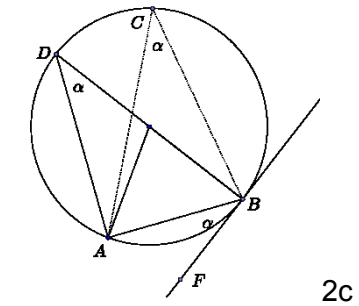
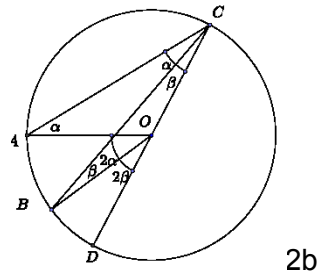
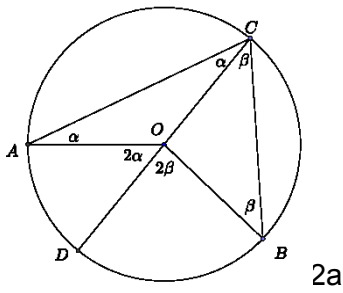
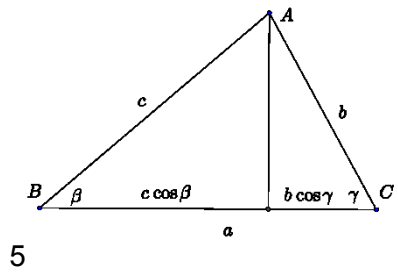
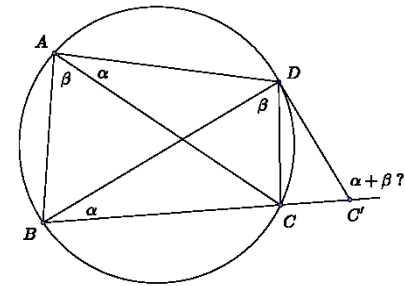
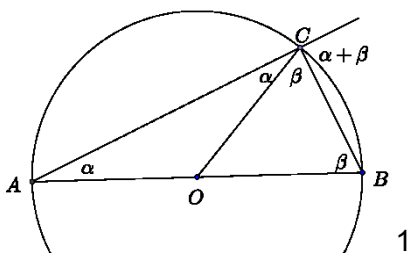
$$d = \sqrt{R^2 - 2rR}.$$

( $R$  ja  $r$  ovat ympärysympyrän ja sisäympyrän säteet.)

10. *Simsonin suora.* Kolmion  $ABC$  ympärysympyrän pisteen  $P$  kohtisuorat projektiot kolmion sivut sisältäville suorille ovat samalla suoralla.

11. Olkoon  $ABCD$  jännelikulmio. Olkoot  $P, Q$  ja  $R$  pisteen  $D$  kohtisuorat projektiot suorilla  $BC, CA$  ja  $AB$ , tässä järjestyksessä. Osoita, että  $PQ = QR$ , jos ja vain jos kulmien  $\angle ABC$  ja  $\angle ADC$  puolittajien leikkauspiste on suoralla  $AC$ . (Kansainväliset matematiikkaolympialaiset 2003)

12. Kuperassa eli konveksissa nelikulmiossa  $ABCD$  on  $\angle ADC = 90^\circ$ . Olkoot  $E$  ja  $F$  pisteen  $B$  projektiot suorilla  $AD$  ja  $AC$ , tässä järjestyksessä. Oletetaan, että  $F$  on pisteiden  $A$  ja  $C$  välissä, että  $A$  on pisteiden  $D$  ja  $E$  välissä ja että suora  $EF$  kulkee janan  $BD$  keskipisteen kautta. Osoita, että nelikulmion  $ABCD$  ympäri voidaan piirtää ympyrä. (Baltian Tie -joukkue matematiikkakilpailu 2007)



9 10