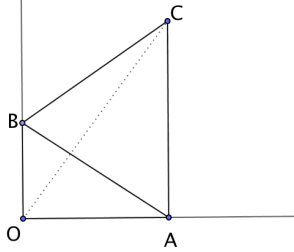


**Galois-kerhon kesäpätkinät 2019** (For the English version see page 2)

*Tehtävät käsitellään kerhon alkaessa syyskuussa 2019.*

1. Pisteet A ja B ovat suoran kulman O kyljillä ja piste C on kylkien välissä. Todista, että kolmion ABC piiri ei voi olla pienempi kuin janan OC pituus kerrottuna kahdella.



2. Kolmion sivut ovat  $a, b$  ja  $c$ , missä  $a \geq b \geq c$  ja pinta-ala on 1. Todista, että  $b \geq \sqrt{2}$ .
3. Onko mahdollista, että kolmion korkeusjanat suhtautuvat kuten 1: 2: 3. Perustele.
4. Luonnollinen luku  $x$  on *potenssiluku*, jos  $x = a^n$ , missä kantaluku  $a > 1$  ja eksponentti  $n > 1$  ovat luonnollisia lukuja. Etsi kaksi potenssilukua  $x = a^n$  ja  $y = b^m$  alueelta  $2 \leq x, y \leq 1000$ , joiden erotus on (a) 1, (b) 2, (c) 3, (d) 4, (e) 5.
5. Todista, että

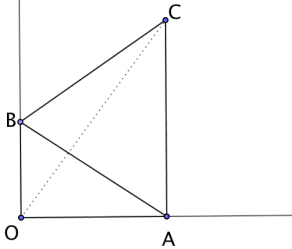
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{98} - \frac{1}{99} + \frac{1}{100} > \frac{1}{5}.$$

6. Olkoot  $a = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 97 \cdot 99$  ja  $b = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 98 \cdot 100$ . Todista, että osamäärä  $a/b$  on (a) pienempi kuin  $1/10$  ja (b) jopa pienempi kuin  $1/12$ , mutta (c) suurempi kuin  $1/15$ .
7. Olkoot  $a, b$  ja  $c$  reaalilukuja. Todista: Jos  $a + b + c = 0$ , niin  $ab + bc + ca \leq 0$ .
8. Kirjoita kymmenjärjestelmän luvut 27 ja 81 kolmejärjestelmässä ja laske sitten (salamannopeasti päässä) niiden tulo kolmejärjestelmässä. Tarkista kymmenjärjestelmässä.
9. Leikkuulaudalla on leipäviipale. (a) Onko mahdollista leikata viipale kahtia suoralla viillolla siten, että palat ovat tarkalleen samanpainoiset? Perustele vastauksesi. (b) Leipäviipaleen päälle pursotetaan kasa kaviaaria. Onko mahdollista leikata tämä kaviaarileipä kahtia suoralla viillolla siten, että kummassakin palassa on sama määrä sekä leipää että kaviaaria?
10. Todista, että kuuden parittoman luonnollisen luvun käänteisarvojen summa ei voi olla 1.

**Galois club nuts for summer 2019** (Suomenkielinen versio sivulla 1)

*We come back to these problems in the club meetings in September 2019.*

1. Points A, B, C are placed in the right angle O as shown in the diagram below. Prove that the sum  $AB+BC+CA$  can never be less than two times OC.



2. Consider a triangle with sides  $a, b, c$  and area 1. Let  $a \geq b \geq c$ . Prove that  $b \geq \sqrt{2}$ .
3. Given any triangle, is it possible that its altitudes are in ratios 1: 2: 3. Why or why not?
4. A natural number  $x$  is called a *powernumber* if  $x = a^n$  where  $a > 1$  and  $n > 1$  are natural numbers. Find two powernumbers  $x$  and  $y$  with  $2 \leq x, y \leq 1000$  such that their difference is (a) 1, (b) 2, (c) 3, (d) 4, (e) 5.
5. Prove that

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{98} - \frac{1}{99} + \frac{1}{100} > \frac{1}{5}.$$

6. Let  $a = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 97 \cdot 99$  and  $b = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 98 \cdot 100$ . Prove that the quotient  $a/b$  is (a) less than  $1/10$  and (b) even less than  $1/12$  but (c) greater than  $1/15$ .
7. Let  $a, b, c$  be real numbers. Prove: If  $a + b + c = 0$  then  $ab + bc + ca \leq 0$ .
8. Write decimal numbers 27 and 81 in ternary system (three-based system) and compute then (in a blink of eye) their product in the same system. Check your answer (use of calculator allowed) in the decimal system.
9. A piece of bread lies on a plate. (a) Is it possible to make a straight knife cut such that the two resulting pieces have exactly the same weight. (b) On another piece of bread you squeeze a mass of caviar. Is it possible to make a straight knife cut such that the two resulting pieces contain exactly equal weights of both bread and caviar?
10. Prove that it is impossible to find six odd natural numbers such that their inverses add up to 1.