

Mikä on Riemannin hypoteesi? Galois-kerho / 2018-2019 / Teuvo Laurinolli

Vuonna 1859 saksalainen matemaatikko **Bernhard Riemann** (1826-1866) julkaisi 9-sivuisen artikkelin¹ ”Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe”. Siinä hän esitti alkulukuihin liittyvän otaksuman, jota hän ei ollut onnistunut todistamaan. Eikä siinä kukaan muukaan ole onnistunut kuluneiden kohta 160 vuoden aikana. *Riemannin hypoteesiksi* ristityn otaksuman painoarvo on vuosien varrella karttunut ja sitä pidetään nykyään eräänä matematiikan keskeisimmistä ongelmista.

Oulun Lyseolla 1990-luvulta alkaen toiminut ranskalaisen matemaatikon Evariste Galoisin (1811-1832) mukaan nimetty lukiolaisten matematiikan kerho otti lukuvuoden 2018-2019 ohjelmaan retken kohti Riemannin hypoteesin ymmärtämistä. Tähän kirjoitukseen on koottu retken vaiheita.

1. Alkuluvut (prime numbers)

Jaottomia positiivisia kokonaislukuja 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ..., kutsutaan *alkuluvuiksi*. Alkuluku on jaollinen vain ykkösellä ja itsellään. Sillä ei ole *aitoja* tekijöitä päinvastoin kuin *yhdistetyillä luvuilla* kuten 18. Onhan $18 = 2 \cdot 9 = 2 \cdot 3 \cdot 3$. Alkuluvut ovat lukumaailman atomeja siinä mielessä, että jokainen luonnollinen luku voidaan jakaa *alkutekijöihin* kuten edellä 18. *Aritmetiikan peruslauseen* mukaan alkutekijöihin jako (prime factorization) on *yksikäsitteinen* (unique). Vaikka tekijöihin jakoprosessi voi edetä monia eri reittejä, niin lopputulos on aina sama. Esimerkiksi $18 = 3 \cdot 6 = 3 \cdot 2 \cdot 3 = 2 \cdot 3 \cdot 3$. Tämä asia on ollut tiedossa jo antiikin ajoista, vaikka sen yleinen todistaminen vaatii ns. induktiopäätelyä.

Alkulukujen jakautumista ja esiintymistiheyttä peräkkäisten kokonaislukujen jonossa on myös pohdittu tuhansia vuosia. Kerhossakin kävimme läpi Eukleideen (n. 300 eaa) yksinkertaisen todistuksen sille, että alkulukuja on *äärettömän monta*. Ne eivät koskaan lopu, vaikka niiden esiintyminen käykin harvemmaksi edettäessä lukujonossa. Ensimmäiseltä tuhatväliltä 2–1000 löytyy 168 alkulukua, mutta toiselta 1001–2000 vain 135 ja kymmenenneltä 9000–10000 enää 112. Riittävän pitkälle mentäessä löytyy tuhatvälejä, joilla ei ole yhtään alkulukua².

Alkulukujen yleisyyttä voidaan mitata *alkulukulaskureilla* (prime counting functions), matemaattisilla funktioilla, jotka antavat asiasta tietoa. Tavallisin alkulukulaskuri on funktio $\pi(n)$. Se³ ilmaisee alkulukujen määrän n :n ensimmäisen luonnollisen luvun joukossa $\{1, 2, 3, \dots, n-1, n\}$. Niinpä $\pi(15) = 6$, koska lukujoukossa $\{1, 2, 3, \dots, 14, 15\}$ on kuusi alkulukua 2, 3, 5, 7, 11 ja 13. Samoin voi kynän ja paperin avulla melko nopeasti todeta, että $\pi(100) = 25$. Edellisen kappaleen tietojen perusteella on $\pi(1000) = 168$ ja $\pi(2000) = 303$. Ensimmäisellä satavälillä alkulukujen osuus on siis 25 %, mutta tuhatvälillä vain 16,8 %.

Laskurifunktion π arvojen määrittäminen käy pian aika työlääksi, koska ei tunneta mitään mekaanista laskukaavaa, jolla tuloksen saisi nopeasti. Esimerkiksi arvon $\pi(1000)$ selvittämiseksi on vain – tavalla tai toisella – seulottava⁴ läpi koko lukuväli 1, 2, 3, ..., 999, 1000 ja tarkistettava, onko kohdalla oleva luku (vaikkapa 787⁵) alkuluku vai ei. Elektroniset laitteet (esim. kerhossa käyttämämme WA-laskukone, <http://www.wolframalpha.com>⁶) suoriutuvat tästä seulonnasta yllättävän nopeasti. Tämä tapahtuu WA:ssa komennolla `primepi(1000)` tai pelkkä `pi(1000)`, mutta todella suuriin lukuihin, vaikkapa satanumerosiin, mentäessä koneetkin hytyvät⁷.

¹ *Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, November 1859

² Sellainen väli alkaa esimerkiksi luvusta $1001! + 2$. Näetkö miksi?

³ Laskurifunktion nimenä oleva symboli π ei tässä liity mitenkään ympyrään.

⁴ Joitakin tarkistusta nopeuttavia nyrkkisääntöjä on olemassa. Esim. parilliset sekä nollaan tai viitoseen päättyvät luvut eivät ole alkulukuja ja ne voidaan tarkistuksessa hypätä yli. Voidaan myös käyttää ns. *Eratostheneen seula*.

⁵ On se.

⁶ Sen voi ladata myös ilmaisena kännykkäsovelluksena.

⁷ Mikä on hyväkin, koska esim. pankkitietojen turvallisuus perustuu tähän vaikeuteen.

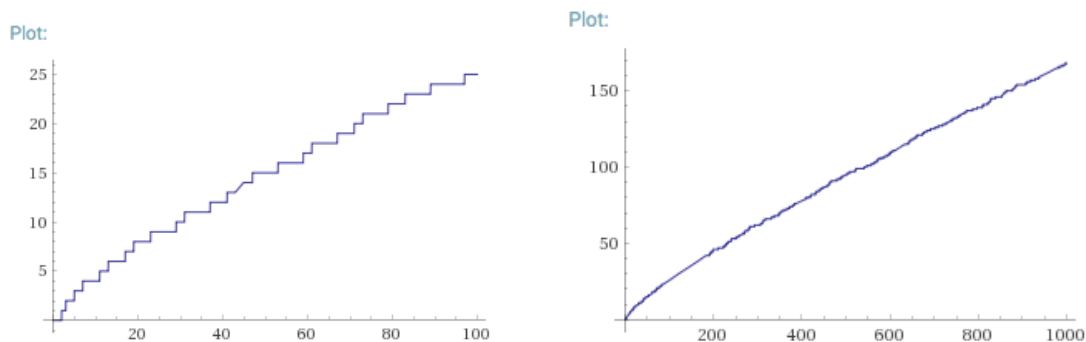
2. Alkulukulaskuri $\pi(x)$ (Prime counting function $\pi(x)$)

Edellä esitetystä laskurifunktion määritelmästä, $\pi(n) =$ ehdon $p \leq n$ täyttävien alkulukujen p lukumäärä, oletimme luvun n olevan *luonnollinen* luku. Erinäisistä syistä on todettu hyödylliseksi laajentaa π -funktion määritelmä koskemaan *kaikkia positiivisia reaali-lukuja* x . Määrittely on aivan sama:

$\pi(x) =$ ehdon $p \leq x$ täyttävien alkulukujen p lukumäärä.

Kun $x = n$ (luonnollinen luku), saadaan tietysti samat funktion arvot $\pi(n)$ kuin edellä, mutta niiden lisäksi saamme nyt laskurifunktiollemme arvot myös ei-kokonaislukupisteissä kuten $\pi(21,3) = 8$. Laskurifunktion kuvaaja on nouseva portaikko, jossa askelkorkeus on 1. Kukin porrastasanne sijoittuu kahden peräkkäisen alkulukupisteen väliin. Niinpä esimerkiksi $\pi(18,999) = 7$, mutta $\pi(19) = 8$. Porrastaskelma on siis kohdassa $x = 19$. Seuraava askelma on kohdassa $x = 23$, koska $\pi(23) = 9$, mutta välillä $19 \leq x < 23$ on koko ajan $\pi(x) = 8$. Korkeudella 8 oleva tasanne on siis peräkkäisten alkulukujen 19 ja 23 välissä.

Kerhossa käytimmekin WA-komentoja kuten `plot [primepi(x)] x = 0 to x = 100`, joka tulostaa näyttöruudulle funktion $\pi(x)$ porrasmaisen kuvaajan välillä $0 \leq x < 100$. WA:n laskentateho näyttää riittävän hyvin, vaikka ylärajaa kasvatetaan miljoonaan ja ylikin. Silloin portaikko alkaa jo ruudulla sulautua jatkuvaksi käyräksi.

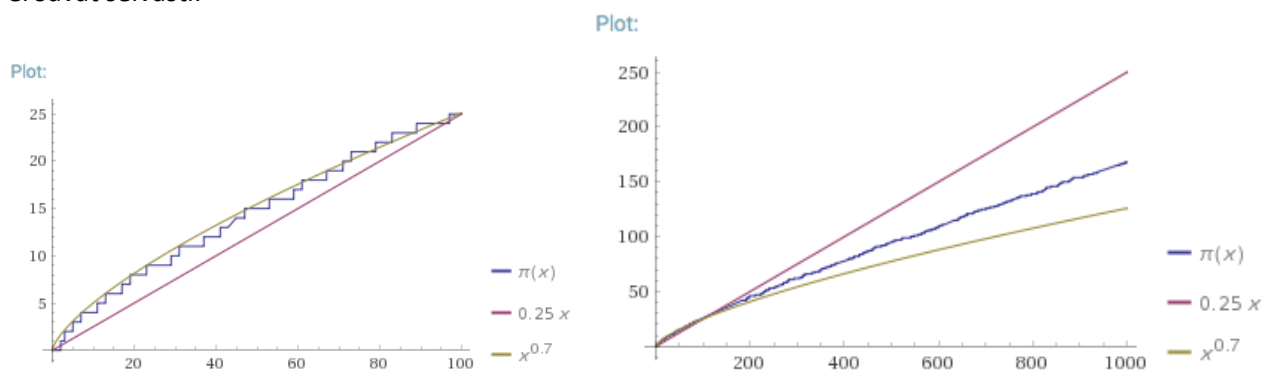


KUVIO 2.1. Laskurifunktion $\pi(x)$ kuvaajat väleillä $0 \leq x < 100$ ja $0 \leq x < 1000$. Courtesy of WA.

Yritimme myös mallintaa laskurifunktiota $\pi(x)$ tutuilla funktioilla kuten lineaarisella funktiolla $f(x) = 0,25x$ tai potenssifunktiolla $g(x) = x^{0,7}$. WA-komennolla tyyppiä

`plot [primepi(x) , 0.25x , x^0.7] x = 0 to x = 1000`

saimme ruudulle kaikkien kolmen funktion kuvaajat samaan koordinaatistoon ja saatoimme vertailla niitä eri x -väleillä. Vaikka likimääräistä yhteensopivuutta saattaa nähdä esim. välillä 0 - 100, niin kauemmas edettäessä tied eroavat selvästi.



KUVIO 2.2. Funktioiden $\pi(x)$, $0,25x$ ja $x^{0,7}$ kuvaajat väleillä $0 \leq x < 100$ ja $0 \leq x < 1000$. Courtesy of WA.

Riemannin hypoteesi liittyykin juuri tähän kysymykseen. Voidaanko luonnollisten lukujen jonossa esiintyvien alkulukujen määrää mallintaa jollakin helposti laskettavalla funktiolla ilman, että tarvitsee käydä työläästi läpi kaikkia jonon lukuja (tai huomattavaa osaa niistä).

3. Potenssilaskuri $T_p(x)$ ja logaritmi $\log_p x$ (Prime power counting function $T_p(x)$ and $\log_p x$)

Venäläinen matemaatikko Pafnuti Chebyshev⁸ (1821-1894) huomasi, että laskurifunktion $\pi(x)$ ohella on hyödyllistä tarkastella myös funktiota $T_p(x)$. Se laskee kaikki alkuluvun p positiiviset kokonaislukupotenssit p^k , jotka ovat $\leq x$. Esimerkiksi $T_2(20) = 4$, koska määrittelyehdon täyttäviä potensseja on neljä: $2^1, 2^2, 2^3$ ja 2^4 . Samoin on $T_3(50) = 3$, $T_5(100) = 2$ ja $T_{11}(103,7) = 1$. Huomaamme, että $T_p(x)$ on samalla suurin kokonaislukueksponentti k , jolla $p^k \leq x$.

Funktion $T_p(x)$ kiinnostavuus johtuu siitä, että se on läheisessä yhteydessä matematiikassa yleiseen *logaritmifunktioon* $\log_p x$, jonka arvona on se eksponentti y , jolla $p^y = x$. Logaritmifunktio löytyy yleensä tavallisesta laskimestakin, joka antaa seuraavia tuloksia: $\log_2 20 = 4.32$, $\log_3 50 = 3.56$, $\log_5 100 = 2.86$, $\log_{11} 103.7 = 1.96$. Huomaamme, että potenssilaskurin $T_p(x)$ arvo on sama kuin logaritmifunktion $\log_p x$ arvon kokonaisosa⁹ eli $T_p(x) = \text{floor}(\log_p x)$. Tämä on tietysti selvää jo määritelmienkin perusteella. Niistä myös seuraa, että $0 \leq \log_p x - T_p(x) < 1$. Tämä tarkoittaa, että potenssilaskurifunktiota $T_p(x)$ voidaan approksimoida logaritmifunktiolla $\log_p x$ niin, että maksimivirhe on +1.

Logaritmifunktiossa $\log_p x$ esiintyvä luku p on nimeltään kantaluku. Puhutaan p -kantaisesta logaritmista samaan tapaan kuin p -kantaisesta eksponenttifunktiosta p^x . Eksponenttifunktio ja logaritmifunktio ovatkin toistensa *käänteisfunktioita*. Jos lukuun x sovelletaan ensin logaritmifunktiota ja saatuun tulokseen samankantaista eksponenttifunktiota, niin lopputuloksena saadaan alkuperäinen luku x . Yhtälönä ilmaistuna tämä tarkoittaa, että $p^{\log_p x} = x$. Yleisesti käytettyjä kantalukuja ovat 2, 10 ja erityisesti ns. Neperin luku $e \approx 2,72$. Funktioilla $\log_e x$ ja e^x on eräitä hyviä ominaisuuksia¹⁰, joiden vuoksi niitä kutsutaan *luonnollisiksi*. Luonnollisesta logaritmista $\log_e x$ käytetäänkin yleensä (laskimissakin) merkintöjä $\ln x$ tai $\log x$, joissa kantaluvuksi oletetaan juuri luku e . Mainittu käänteisfunktio-ominaisuus on tällöin: $e^{\ln x} = x$.

Erikantaiset eksponenttifunktiot ovat lähisukulaisia. Tämä tarkoittaa, että mikä tahansa eksponenttifunktio voidaan ilmaista tietyssä kannassa, vaikkapa kannassa e . Niinpä $5^x = e^{x \cdot \ln 5}$. Miksi näin? No siksi, että peräkkäisen potenssin laskusäännön perusteella on $e^{x \cdot \ln 5} = (e^{\ln 5})^x = 5^x$. Vastaavasti logaritmifunktiot ovat keskenään sukulaisia, joten kaikenkantaiset logaritmit voidaan laskea luonnollisen logaritmin avulla eli $\log_p x = \ln x / \ln p$. Miksi näin? Siksi, että $p^{\ln x / \ln p} = (e^{\ln p})^{\ln x / \ln p} = e^{\ln p \cdot (\ln x / \ln p)} = e^{\ln x} = x$.

Yllä mainittu Chebyshev keksi rakentaa potenssilaskurifunktioista $T_p(x)$ ja logaritmifunktiosta $\ln x$ vielä uuden laskurifunktion $\psi(x)$, jonka symbolina on kreikkalainen kirjain ψ (psi). Esimerkki valaiskoon sen määritelmää:

$$\psi(14) = T_2(14) \cdot \ln 2 + T_3(14) \cdot \ln 3 + T_5(14) \cdot \ln 5 + T_7(14) \cdot \ln 7 + T_{11}(14) \cdot \ln 11 + T_{13}(14) \cdot \ln 13,$$

joka on siis termien $T_p(x) \cdot \ln p$ summa, kun p käy läpi kaikki alkuluvut $\leq x = 14$. Sieventämällä saamme

$$\psi(14) = 3 \cdot \ln 2 + 2 \cdot \ln 3 + 1 \cdot \ln 5 + 1 \cdot \ln 7 + 1 \cdot \ln 11 + 1 \cdot \ln 13 \approx 12,8.$$

Funktion $\psi(x)$ arvoja voimme laskea hieman konstikkaalla WA-komennolla, joka antaa mm. seuraavat yksidesimaaliset tulokset: $\psi(1000) \approx 996.7$ ja $\psi(10000) \approx 10013.4$ ja $\psi(50000) \approx 49985.9$. Näyttää siis siltä, että $\psi(x) \approx x$.

Toisaalta $\psi(x)$ on muotoa $T_p(x) \cdot \ln p$ olevien termien summa ja näitä termejä on yhtä monta kuin alkulukuja $\leq x$ eli $\pi(x)$ kappaletta. Edellä näimme, että $T_p(x) \approx \log_p x$ (virhe ≤ 1), missä taas $\log_p x = \ln x / \ln p$. Niinpä $\psi(x)$:n

⁸ Alkukielellä Чебышев.

⁹ Kokonaisosalle käytetään myös merkintää $\text{int}(\log_p x)$.

¹⁰ Ne liittyvät näiden funktioiden derivaattoihin.

summatermi $T_p(x) \cdot \ln p \approx \log_p x \cdot \ln p = (\ln x / \ln p) \cdot \ln p = \ln x$ ja kun termejä on $\pi(x)$ kappaletta, niin $\psi(x) \approx \pi(x) \cdot \ln x$ kappaletta. Mutta edellä totesimme empiirisen aineiston perusteella, että $\psi(x) \approx x$, joten $x \approx \pi(x) \cdot \ln x$, josta saammekin kaipaamamme hypoteettisen *likimääräisen* laskukaavan laskurifunktiolle: $\pi(x) \approx x / \ln x$. Tämän arvauksen todistivat oikeaksi vuonna 1896 ranskalainen Jacques Hadamard (1865-1963) ja belgialainen Charles de la Vallée-Poussin (1866-1962). Tulosta kutsutaan Alkulukulauseksi (Prime number theorem):

ALKULUKULAUSE / PRIME NUMBER THEOREM (1896)

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$$

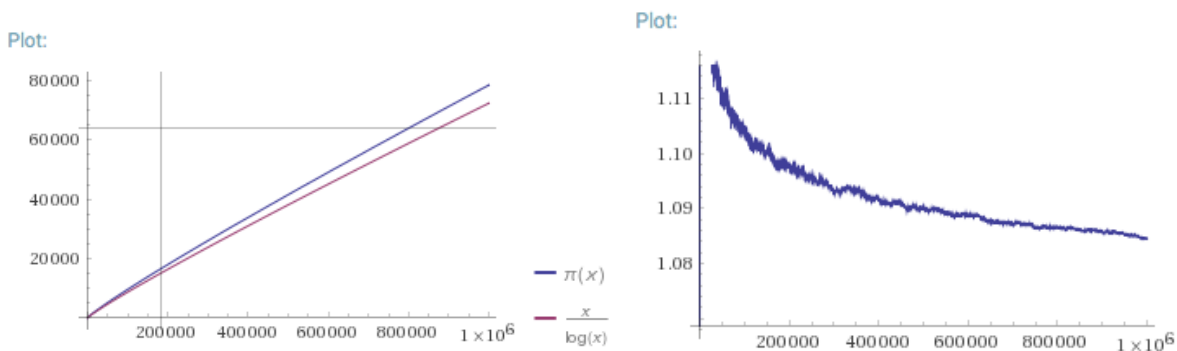
Symboli \sim tarkoittaa, että likiarvon $L(x) = x / \ln x$ suhteellinen virhe $|\pi(x) - L(x)| / \pi(x)$ lähenee nollaa, kun $x \rightarrow \infty$. Sanotaan myös, että $L(x)$ on *hyvä* likiarvo funktiolle $\pi(x)$.

WA-komennolla `primepi(x)/(x/log(x))` saamme seuraavat virheprosentit

TAULUKKO 3.1: Approksimaation $L(x) \sim \pi(x)$ prosentuaalinen virhe

x	100	10 000	1000 000	100 000 000	10 000 000 000
Virhe	15,1 %	13,2 %	8,4 %	6,1 %	4,8 %

Näemme, että suhteellinen virhe pienenee, mutta suhteellisen hitaasti.



KUVIO 3.1: Vasemmalla funktiot $\pi(x)$ ja $L(x)$. Oikealla osamäärä $\pi(x) / L(x)$ ad $x = 10^6$. Courtesy of WA.

4. Gaussin approksimaatio

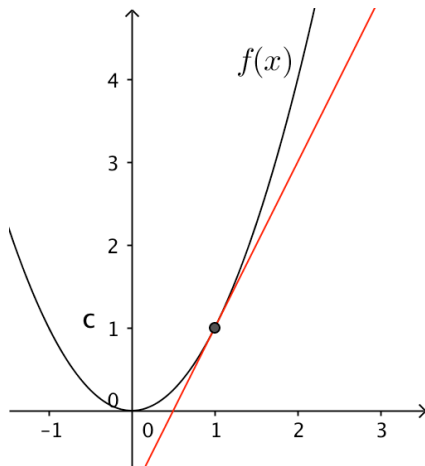
Edellä totesimme, että funktio $L(x) = x / \ln x$ antaa hyvän approksimaation laskurifunktiolle $\pi(x)$, "hyvän" siinä mielessä, että funktioiden $L(x)$ ja $\pi(x)$ suhde lähenee arvoa 1, kun $x \rightarrow \infty$. *Absoluuttisilla* arvoilla mitaten likiarvon tarkkuus ei kuitenkaan ole kovin hyvä. Taulukosta 1 näemme, että kohdassa $x = 10^{10}$ (kymmenen miljardia) absoluuttinen poikkeama $\pi(x) - L(x)$ on n. 500 miljoonaa.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) etsi $L(x)$:n tilalle tarkempaa approksimoivaa funktiota. Hän havaitsi (ks. KUVIO 3.1, vas.), että funktio $L(x)$ kasvaa hitaammin¹¹ kuin $\pi(x)$. Hän päätteli, että paremman approksimaatiofunktion

¹¹ Gauss selvitti tämän kynällä ja paperilla. WA-laskuria hänellä ei ollut käytössään, mahdollisesti kuitenkin laskutikku ja logaritmitaulut, jollaisia lukiolaiset käyttivät vielä kirjoittajan kouluvuosina 1960-luvulla.

pitää kasvaa hieman nopeammin kuin $L(x)$. Etsinnässä hän turvautui satakunta vuotta aiemmin keksittyyn matemaattiseen työkaluun *derivaattaan*, jolla funktioiden kasvuvauhtia voidaan mitata. Tästä tarkempi selostus alla olevassa laatikossa

Derivaatta funktion kasvunopeuden mittarina



KUVIO 4.1: Funktion $f(x) = x^2$ kuvaajaparaabeli ja sen kohtaan $x = 1$ piirretty tangenttisuora, jonka kulmakerroin on 2.

Funktion $f(x)$ kasvunopeutta eli *derivaattaa* voidaan havainnollistaa kuvaajalle piirretyillä tangenttisuorilla. Tangentin suunta ilmaisee funktion muutosnopeuden. Nouseva tangentti ilmaisee positiivisen muutosnopeuden (kasvunopeuden) ja laskeva tangentti ilmaisee negatiivisen (vähennysopeuden). Jyrkemmin nouseva (suurempi kulmakerroin) tangentti ilmaisee suuremman kasvunopeuden kuin loivemmin nouseva (pienempi kulmakerroin) tangentti.

Muutosnopeuden mittarina on siis tangentin kulmakerroin eli derivaatta. Se vaihtelee kuvaajan pisteestä toiseen. Funktion $f(x) = x^2$ derivaatta kohdassa $x = 1$ on 2, mutta kohdassa $x = 2$ se on selvästi suurempi. Merkintä $f'(x)$ tarkoittaa funktion $f(x)$ derivaatan arvoa kohdassa x . Kuvion tilanteessa on siis $f'(1) = 2$.

Derivaatan käyttökelpoisuus perustuu paljolti siihen, että tavallisille funktioille on olemassa *derivoimissääntöjä*, joiden avulla funktion lausekkeesta $f(x)$ voidaan päätellä sen derivaatan lauseke $f'(x)$. Näitä sääntöjä käyttämällä saadaan esim. funktion $f(x) = x^2$ derivaatalle lauseke $f'(x) = 2x$. Siitä seuraa heti kuviosta havaittu tulos $f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$, tai vaikkapa $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$ tai $f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$ tai $f'(-1) = 2 \cdot (-1) = -2$, mitkä voi varmentaa kuviosta viivaimen avulla.

Edellä käytetty derivoimissääntö merkitään usein lyhyesti $D(x^2) = 2x$. Muita vastaavia sääntöjä ovat mm. $D(x^3) = 3x^2$, yleisemmin $D(x^n) = nx^{n-1}$ tai $D(\ln x) = 1/x$. Vakiofunktion $f(x) = c$ derivaatta on nolla [eli $D(c) = 0$]. Sehän ei kasva eikä vähene, kuvaaja on vaakasuora ja sen tangentti on joka kohdassa täsmälleen sama suora, jonka kulmakerroin = 0.

Derivaatan käänteisoperaatio on *integraali* eli *antiderivaatta*, jonka symboli on venytetty S-kirjain. Esimerkiksi

$$\int(2x) = x^2 \text{ tai yhtä hyvin } \int(2x) = x^2 + c, \text{ missä } c \text{ on mikä tahansa vakio.}$$

Integroimissäännöt ovat käännettyjä derivoimissääntöjä.

Gauss pyrki siis lisäämään approksimaatiofunktion $L(x) = x/\ln x$ kasvunopeutta (eli derivaattaa) niin, ettei se jäisi jälkeen laskurifunktiosta $\pi(x)$, mutta kuitenkin niin varovasti, ettei uusi approksimaatiofunktio ampuisi siitä pahasti yli.

Hyvin tuntemiensa derivoimissääntöjen¹² avulla hän totesi, että funktion $L(x) = x/\ln x$ derivaatta on

$$L'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{(\ln x)^2}.$$

Gauss suurensi varovasti tätä derivaattaa jättämällä jälkimmäisen (negatiivisen) termi pois¹³. Funktio $M(x)$, jonka derivaatta olisi $M'(x) = 1/\ln x$ voisi olla parempi approksimaatio $\pi(x)$:lle. Mutta mikä funktio tämä $M(x)$ sitten olisi? Se on tietysti funktion $1/\ln x$ integraalifunktio eli

$$M(x) = \int \left(\frac{1}{\ln x} \right) \text{ tai virallisemmin merkittynä } M(x) = \int \left(\frac{1}{\ln x} \right) dx.$$

Mutta näin määriteltynä $M(x)$ jää hieman (eli vakion c verran) epämääräiseksi. Gauss täsmäsi vakion käyttämällä ns. *määrättyä integraalia*

$$(4.1) \quad \text{Li}(x) = \int_e^x \left(\frac{1}{\ln x} \right) dx,$$

missä hän antoi funktiolle $M(x)$ nimen¹⁴ $\text{Li}(x)$. Tässä e on luonnollisen logaritmin kantaluku. Määrittely (4.1) tarkoittaa, että $\text{Li}(x)$ on funktion $1/\ln x$ antiderivaatta (ts. $D[\text{Li}(x)] = 1/\ln x$) ja lisäksi $\text{Li}(e) = 0$.

Seuraavaksi meidän pitäisi päästä vertaamaan funktiota $\text{Li}(x)$ ja laskurifunktiota $\pi(x)$. Tätä varten meidän pitäisi pystyä laskemaan funktion $\text{Li}(x)$ arvoja.

Yleensä (4.1):n kaltainen *määrätty integraali* lasketaan näin:

$$(4.2) \quad \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

missä $F(x)$ on jokin $f(x)$:n integraalifunktio (saatu integroimissäännöillä).

Esimerkiksi, jos $f(x) = 2x$, niin $F(x) = x^2$ (tai mikä tahansa $F(x) = x^2 + c$) ja

$$(4.3) \quad \int_1^3 (2x) dx = F(3) - F(2) = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5,$$

tai

$$(4.4) \quad \int_2^x (2x) dx = F(x) - F(2) = x^2 - 2^2 = x^2 - 4.$$

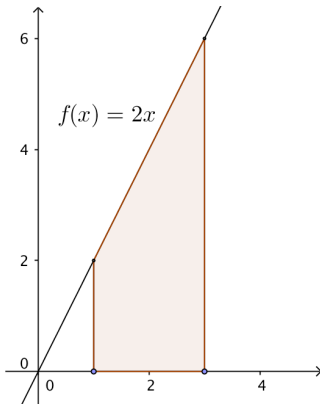
Tämä menetelmä ei toimi $\text{Li}(x)$:n määrittely-yhtälössä (4.1), koska funktion $1/\ln x$ integraalifunktiota $F(x)$ ei voida muodostaa tavallisilla integroimissäännöillä. Integraali (4.1) ja samalla $\text{Li}(x)$ voidaan kuitenkin laskea riittävän tarkasti numeerisilla likiarvomenetelmillä, jotka perustuvat määrätyn integraalin

¹² Edellä mainittujen lisäksi hän tarvitsi vain ns. osamääräsäännön: $D[f/g] = f'g - g'f/g^2$.

¹³ Tämä on varovainen muutos, sillä suurilla x :n arvoilla poistettu jälkimmäinen termi on itseisarvoltaan pieni verrattuna jäljellejäävään edelliseen termiin. Esim. arvolla $x=10000$ edellinen termi on n. 0,1 ja jälkimmäinen n. 0,01.

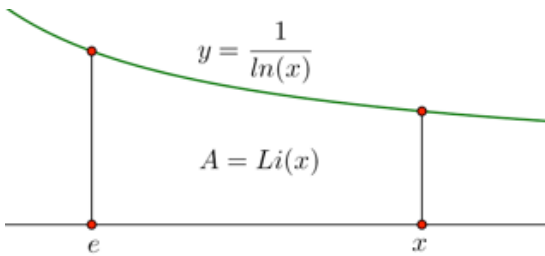
¹⁴ Li tulee sanoista *Logaritminen integraali*

pinta-ala-tulkintaan. Esimerkkinä siitä tarkastelemme edellä laskettua integraalia (4.3). Se voidaan tulkita pinta-alaksi, jota rajoittavat funktion $f(x) = 2x$ kuvaaja ja x -akseli välillä $1 \leq x \leq 3$. Ks. KUVIO 4.2 alla.



KUVIO 4.2: Funktion $f(x) = 2x$ määrätty integraali (4.3) on 8, siis sama kuin suoran $y = 2x$ ja x -akselin välillä $1 \leq x \leq 3$ rajoittaman puolisuunnikkaan pinta-ala = pystysuuntaisten kantojen 2 ja 6 keskiarvo 4 kerrottuna niiden välimatkalla (korkeudella) 2.

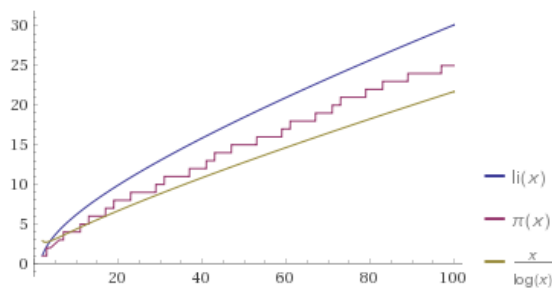
Samoin yhtälöllä (4.1) määritelty funktio $Li(x)$ on käyrän $y = 1/\ln x$ ja x -akselin välillä $[e, x]$ rajoittaman alueen ala, ks. KUVIO 4.3.



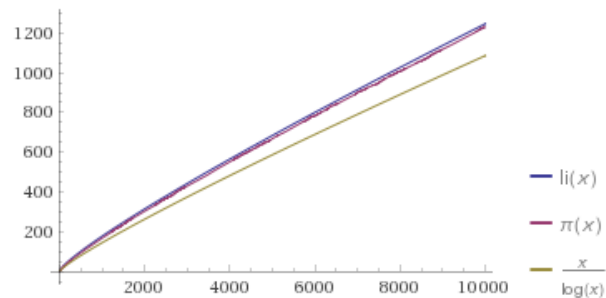
KUVIO 4.3: $Li(x)$ on se pinta-ala, jonka käyrä $y = 1/\ln x$ ja x -akseli rajoittavat välillä $[e, x]$.

Pinta-alaa $A = Li(x)$ ei voida laskea millään geometriasta tutulla pinta-alan kaavalla. Jokaisella muuttujan x numeerisella arvolla tuo ala saadaan kuitenkin riittävän tarkasti käyttämällä *numeerista integrointia* eli esim. jakamalla alue kapeisiin pystysuuntaisiin suikaleisiin (ovat likimain suorakulmioita) ja ynnäämällä niiden alat yhteen. Tehokasta automatisoitua laskentatekniikkaa (kuten WA) käyttämällä saadaan lasketuksi nopeasti riittävä määrä $Li(x)$:n arvoja, niin että sen kuvaaja voidaan tulostaa vertailua varten yhdessä funktioiden $\pi(x)$ ja $L(x)$ kanssa. Viimeksi mainittu $L(x) = x/\ln x$ oli se $\pi(x)$:n ensimmäinen approksimaatio, jonka Alkulukulause (Prime Number Theorem) osoittaa kohtuullisen hyväksi.

Plot:



Plot:



KUVIO 4.4: Funktiot $Li(x)$ [ylin], $\pi(x)$ [kesk.] ja $L(x) = x/\ln x$ [alin] väleillä $[2, 100]$ ja $[2, 10\,000]$. Courtesy of WA.

KUVIO 4.4 näyttäisi osoittavan, että Gaussin parannusehdotus oli onnistunut. Varsinkin pidemmässä juoksussa $Li(x)$ näyttää olevan funktiota $L(x)$ parempi approksimaatio alkulukulaskurille $\pi(x)$. Tätä johtopäätöstä tukee myös vertailutaulukko 2 alla. Taulukon luvut on laskettu WA:n avulla.

TAULUKKO 4.1. Virhevertailu laskurifunktion $\pi(x)$ approksimaatioiden $L(x)$ ja $Li(x)$ välillä

x	1000	10 000	100 000	1000 000
$\pi(x)$	168	1229	9593	78498
$L(x)$	144,8 (-13,8 %)	1085,7 (-11,7 %)	8685,9 (-9,4 %)	72382,4 (-7,8 %)
$Li(x)$	177,6 (+5,7 %)	1246,1 (+1,4 %)	9629,8 (+0,39 %)	78627,5 (+0,16 %)
$\sqrt{\pi(x)}$	13,0 (7,7 %)	35,1 (2,9 %)	97,9 (1,0 %)	280,2 (0,36 %)

Taulukon riveillä $L(x)$ ja $Li(x)$ olevat prosenttiluvut kertovat kuinka monta prosenttia nämä likiarvot poikkeavat laskurifunktiosta $\pi(x)$. Viimeisellä rivillä prosenttiluvut kertovat kuinka monta prosenttia $\sqrt{\pi(x)}$ on $\pi(x)$:stä.

Huomautus: Kuviota 4.4 tarkastelemalla näyttää siltä, että $Li(x)$:n kuvaaja kulkee aina $\pi(x)$:n kuvaajan yläpuolella [eli $Li(x) > \pi(x)$], mutta näin ei ole. John E. Littlewood (1885-1977) todisti jo yli sata vuotta sitten (1914), että nämä kuvaajat itse asiassa leikkaavat toisensa äärettömän monta kertaa. Nykyaikainenkaan laskentateknikka ei ole onnistunut etenemään edes ensimmäiseen leikkauspisteeseen saakka. Vuonna 2000 Carter Bays ja Richard Hudson kuitenkin todistivat, että tuo piste tulee vastaan ennen x :n arvoa $1,4 \cdot 10^{316}$.

Neliöjuuritarkkuus

Eräs likiarvon tarkkuuden kriteeri on ns. *neliöjuuritarkkuus* (square root accuracy). Mitä se tarkoittaa? Olkoon funktio $v_l(x)$ likiarvo funktiolle $v(x)$. Absoluuttinen virhe on siis $|v(x) - v_l(x)|$. Jos tämä virhe on kaikilla muuttujan x arvoilla pienempi kuin tarkan arvon $v(x)$ neliöjuuri, niin likiarvo on *neliöjuuritarkka* (square root accurate). Toisin sanoen, jos kaikilla muuttujan x arvoilla on $|v(x) - v_l(x)| \leq \sqrt{v(x)}$, niin funktio $v_l(x)$ on funktion $v(x)$ neliöjuuritarkka approksimaatio.

RIEMANNIN HYPOTEESI (versio 1)

Funktio $Li(x)$ on laskurifunktion $\pi(x)$ neliöjuuritarkka approksimaatio.

Kommentti edelliseen: Taulukosta 2 näemme, että hypoteesi pätee approksimaatiolle $Li(x)$ kaikilla lasketuilla muuttujan x arvoilla. Avoin ongelma on, päteekö se kaikilla x :n arvoilla. Samasta taulukosta näemme myös, että vaikka $L(x) = x/\ln x$ on hyvä approksimaatio¹⁵, niin se ei ole *neliöjuuritarkka* approksimaatio laskurifunktiolle $\pi(x)$.

5. Riemannin zetafunktio

Riemannin hypoteesi liittyy ns. *Riemannin zetafunktioon*, jonka avulla alkulukujen arvaamatonta käyttäytymistä on mahdollista kuvata tarkasti (eli laskea tarkasti funktion $\pi(x)$ tai $\psi(x)$ arvoja), mutta vain sillä edellytyksellä, että Riemannin esittämä hypoteesi pitää paikkansa. Hypoteesi koskee juuri Riemannin zetafunktiota $\zeta(x)$, joka määritellään päättymättömänä summana eli sarjana

$$(5.1) \quad \zeta(x) = 1^{-x} + 2^{-x} + 3^{-x} + 4^{-x} + 5^{-x} + \dots,$$

¹⁵ Ks. Alkulukulause sivulla 4.

joka kirjoitetaan usein ns. summamerkinä

$$(5.2) \quad \zeta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-x} = 1^{-x} + 2^{-x} + 3^{-x} + 4^{-x} + \dots$$

Päättymätön summa saattaa tuntua oudolta, mutta aivan tuttujakin funktioita voidaan ilmaista sellaisten avulla. Esimerkiksi geometrisen sarjan summakaavasta saamme yhtälön

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \dots,$$

joka pitää paikkansa kaikilla x välillä $-1 < x < 1$. Itse asiassa mikä tahansa tuttu funktio $f(x)$ voidaan esittää tällaisena *potenssisarjana*¹⁶. Sen avulla funktion arvo $f(x)$ saadaan päättymättömänä summana muuttujan x potensseista, jotka on varustettu sopivilla vakio kertoimilla. Kullakin tällaisella sarjakehitelmällä on tietty pätevyysalue (*suppenemisalue*), kuten edellä väli $-1 < x < 1$.

Riemannin zetafunktion sarjakehitelmä (5.2) ei ole tällainen potenssisarja, mutta on osoitettu, että se *suppenee* (eli antaa tulokseksi tietyn äärellisen summan), kun $x > 1$. Sarja *hajaantuu* (summa ei lähene mitään äärellistä raja-arvoa), kun $x \leq 1$.

Zetafunktion yksittäisiä arvoja laski aikoinaan jo Leonhard Euler (1707-1783) saaden

$$(5.3) \quad \zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

ja edelleen muille parillisille x :n arvoille on

$$(5.4) \quad \zeta(4) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-6} = \frac{\pi^6}{945}, \dots,$$

mutta parittomille x :n arvoille on tiedossa vain desimaalilukuarvoja kuten $\zeta(3) = 1,202 \dots$. WolframAlfa-laskuri osaa laskea zetafunktion arvoja komennolla `zeta(x)`.

Todettakoon, että arvolla $x = 1$ (joka ei kuulu zetafunktion suppenemisalueeseen $1 < x < \infty$) saadaan ns. harmoninen sarja

$$\zeta(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots,$$

joka myöskin *hajaantuvan* eli lähenee äärettömyyttä¹⁷.

6. Eulerin tulokaava

Edellä esitetty zetafunktion määritelmä ei mitenkään viittaa alkulukuihin. Euler kuitenkin huomasi jo 1700-luvulla, että zetafunktio voidaan määritellä toisellakin tavalla, jossa alkuluvut ovat keskeisessä asemassa.

¹⁶ Niitä kutsutaan Taylorin sarjoiksi.

¹⁷ Tämä voidaan todistaa helposti pätkimällä summa osiin, joista kukin $\geq 1/2$.

Kun zetafunktio on alun perin määritelty päättymättömänä summana, niin Euler määritteli sen päättymättömänä tulona seuraavasti

$$(6.1) \quad \zeta(x) = \left(\frac{1}{1-2^{-x}}\right) \cdot \left(\frac{1}{1-3^{-x}}\right) \cdot \left(\frac{1}{1-5^{-x}}\right) \cdot \left(\frac{1}{1-7^{-x}}\right) \cdot \left(\frac{1}{1-11^{-x}}\right) \cdot \dots,$$

jossa nimittäjässä olevan potenssin kantaluku juoksee läpi alkulukujen jonoa 2, 3, 5, 7, 11,

Tulomerkitä \prod käyttämällä tämä *Eulerin tulokaava* voidaan kirjoittaa lyhyemmin muotoon

$$(6.2) \quad \zeta(x) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(\frac{1}{1-p^{-x}}\right).$$

Tulokaavan nerokas todistus löytyy tämän tekstin lopussa olevasta liitteestä (LIITE 1).

7. Zetafunktion laajennus reaalityöalueelle $x > 0$ ja $x \neq 1$

Sarjakehitelmällä (5.2) määritelty zetafunktio $\zeta(x)$ on määritelty vain muuttujan reaalityöarvoilla $x > 1$ eli välillä $(1, \infty)$, jolloin kyseinen päättymätön summa *suppenee* eli antaa äärellisen tuloksen. Jo kauan sitten huomattiin, että määrittelyaluetta on mahdollista laajentaa välin $(1, \infty)$ ulkopuolelle. Ensimmäinen askel tähän suuntaan oli käyttää apuna ns. etafunktio $\eta(x)$, jonka sarjakehitelmä näyttää samalta kuin zetafunktionkin, mutta joka toinen termi on vaihtanut etumerkinsä. Siis

$$(7.1) \quad \eta(x) = 1 - 2^{-x} + 3^{-x} - 4^{-x} + 5^{-x} - \dots,$$

joka suppenee kaikilla reaalityöarvoilla $x > 0$ eli välillä $(0, \infty)$. Zeta- ja etafunktio liittyvät läheisesti toisiinsa, sillä voidaan todistaa (harjoitustehtävä¹⁸), että

$$(7.2) \quad \zeta(x) = \frac{1}{1-2^{1-x}} \cdot \eta(x).$$

Yhtälön (7.2) avulla saamme zetafunktion toimimaan myös muuttujan arvoilla $0 < x < 1$ samalla, kun zetan "vanhat" arvot välillä $1 < x < \infty$ säilyvät entisellään. On luontevaa nimittää tätä uuttakin funktiota zetafunktiksi ja merkitä sitä samalla symbolilla $\zeta(x)$.

Yhtälöllä (7.2) laajennetun zetafunktion määrittelyalue koostuu kahdesta *avoimesta* välistä $(0,1)$ ja $(1, \infty)$. Apuna käytetty etafunktio $\eta(x)$ on määritelty myös kohdassa $x = 1$ (itse asiassa $\eta(1) = \ln 2 \approx 0,693$), mutta zetafunktio ei ole määritelty siinä kohdassa, sillä yhtälössä (7.2) oleva jakaja $1 - 2^{1-x}$ menee nollassi, kun $x = 1$.

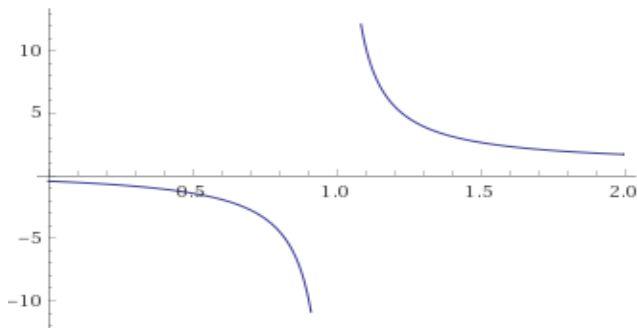
Alla olevaan taulukkoon on WA:n avulla laskettu eräitä laajennetun zetafunktion arvoja.

Taulukko 7.1. Zetafunktion arvoja välillä $0 < x < 2$ (Courtesy of WA)

x	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5
$\zeta(x)$	-0,60	-0,90	-1,46	-2,79	-9,43	10,58	3,93	2,61

Alla olevassa kuviossa 7.1 on laajennetun zetafunktion kuvaaja välillä $0 < x < 2$.

¹⁸ Vihje: Osoita ensin, että $\zeta(x) - \eta(x) = 2^{1-x} \cdot \zeta(x)$.



KUVIO 7.1. Zetafunktion $\zeta(x)$ kuvaaja välillä $0 < x < 2$. Courtesy of WA

Näemme, että lähestyttäessä kohtaa $x = 1$ vasemmalta puolelta $\zeta(x) \rightarrow -\infty$ ja oikealta puolelta $\zeta(x) \rightarrow +\infty$.

8. Zetafunktion laajennus kompleksiluvuille $z = x + iy$, missä $x > 0$ ja $z \neq 1$

Riemann huomasi, että zetafunktio (ja etafunktio) voidaan määritellä myös muuttujan kompleksilukuarvoille $z = x + iy$, missä x ja y ovat ko. kompleksiluvun reaali- ja imaginaariosa. Tällöin voimme käyttää joko alkuperäistä sarjakehitelmää (5.2) tai parannettua versiota (7.2). Jälkimmäinen antaa laajemman suppenemisalueen, joten määrittelemme ensin kompleksisen etafunktion

$$(8.1) \quad \eta(z) = 1 - 2^{-z} + 3^{-z} - 4^{-z} + 5^{-z} - + \dots$$

ja edelleen

$$(8.2) \quad \zeta(z) = \frac{1}{1 - 2^{1-z}} \cdot \eta(z),$$

missä $z = x + iy$ on kompleksilukumuuttuja. Määritelmä toimii (antaa äärellisiä arvoja) aina, kun muuttujan z reaali-osa $x > 0$ ja lisäksi täytyy olla $z \neq 1$. Tämä kompleksitason piste $(1,0)$ on niin sanottu *napa*, jossa (8.2) karkaa äärettömyyteen. Funktion $\zeta(z)$ määrittelyalue on kompleksitason puolikas y -akselista oikealle lukuun ottamatta napapistettä $z = 1$. Mutta määritelmä (8.2) antaa WA:n avulla esimerkiksi $\zeta(1 + i) \approx 0,58 - 0,93i$. Määritelmä siis toimii silloinkin, kun reaali-osa $x = 1$, kunhan imaginaariosa $y \neq 0$ eli ei olla napapisteessä.

Riemann halusi laajentaa edelleen zetafunktion määrittelyaluetta myös y -akselin vasemmalle puolelle. Tässä hän onnistuikin ns. *Riemannin funktionaaliyhtälön* avulla. Sitä käyttämällä zetafunktion arvoja voidaan ikään kuin "siirtää" vanhalta alueelta uudelle. Kyseinen funktionaaliyhtälö on

$$(8.3) \quad \zeta(-z) = \frac{-2 \cdot z!}{(2\pi)^{z+1}} \cdot \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) \zeta(z + 1),$$

missä $z = x + iy$ on kompleksimuuttuja.

Yhtälö (8.3) näyttää aika karnealta emmekä tässä yritäkään analysoida sitä sen kummemmin. Toteamme vain, että sen avulla voidaan zetafunktiota laajentaa melkein koko kompleksitasoon lukuun ottamatta aiemmin mainittua napapistettä $z = 1$. Kompleksitason oikea puolikas tuli jo aiemmin hoidetuksi etafunktion avulla, mutta funktionaaliyhtälön avulla pääsemme määrittämään zetan arvot myös kompleksitason vasemmassa puolikkaassa. Jos nimittäin $-z$ on kompleksitason vasemmassa puolikkaassa, niin sen reaali-osa on negatiivinen. Silloin sen vastaluvun z reaali-osa on positiivinen eli z sijaitsee alueella $x > 0$ (eli imaginaariakselin oikealla puolella) ja piste $z + 1$ on vielä yhden askeleen oikealle pisteestä z .

Niinpä funktionaaliyhtälön oikealla puolella oleva zetafunktion arvo $\zeta(z + 1)$ saadaan jo zetan perusmääritelmästä (8.2).

Esimerkkinä laskemme arvon $\zeta(-2)$, joka oli aiemmin määrittelemätön. Saamme sen sijoittamalla funktionaaliyhtälöön $z = 2$

$$\zeta(-2) = \frac{-2 \cdot 2!}{(2\pi)^{2+1}} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot 2}{2}\right) \zeta(2 + 1) = -\frac{4}{8\pi^3} \cdot \sin \pi \cdot \zeta(3) = 0,$$

koska $\sin \pi = \sin 180^\circ = 0$.

Aivan samalla tavalla saadaan arvot

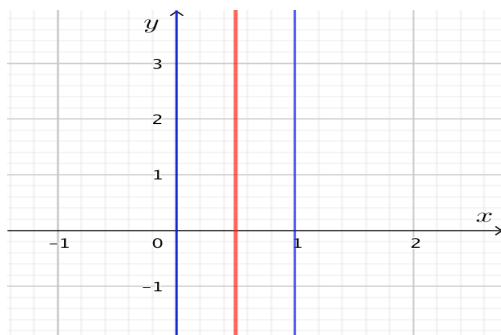
$$\zeta(-4) = \zeta(-6) = \zeta(-8) = \dots = \zeta(-2n) = 0.$$

Parilliset negatiiviset kokonaisluvut ovat siis zetafunktion nollakohtia. Sanotaan, että ne ovat zetafunktion *triviaaleja nollakohtia*. Niitä on siis äärettömän monta.

Zetafunktion ei-triviaalit nollakohdat

Zetafunktiolla tiedetään olevan myös äärettömän monta muutakin – *ei-triviaalia* – nollakohtia.

Funktionaaliyhtälön avulla on melko helppoa osoittaa, että kaikki ei-triviaalit nollakohdat sijaitsevat ns. *kriittisessä kaistassa* (engl. *critical strip*). Kriittinen kaista on pystysuorien $x = 0$ (eli imaginaariakseli) ja $x = 1$ välinen alue eli se kompleksitason alue, jossa $0 \leq x \leq 1$. Ei-triviaalien nollakohtien tarkemman sijainnin paikallistaminen on erittäin vaikeata, mutta toistaiseksi kaikki löydetty ei-triviaalit nollakohdat ovat löytyneet ns. *kriittiseltä suoralta* (engl. *critical line*), joka on kriittisen kaistan puolittava pystysuora $x = 1/2$.



KUVIO 8.1. Kaikki zetafunktion *ei-triviaalit nollakohdat* ovat kompleksitason kriittisessä kaistassa (sinisten suorien rajaama alue $z = x + iy$, missä $0 \leq x \leq 1$ ja $-\infty < y < +\infty$). Kaikki löydetty ei-triviaalit nollakohdat ovat löytyneet kriittiseltä suoralta (punainen suora $z = 1/2 + iy$, missä $-\infty < y < +\infty$). Riemannin hypoteesi sanoo, että *kaikki ei-triviaalit nollakohdat ovat kriittisellä suoralla*, nekin joita ei vielä ole löydetty eikä ehkä koskaan löydetäkään (koska niitä saattaa olla äärettömän monta).

Nyt voimme muotoilla Riemannin hypoteesin lopullisen version niin kuin hän itse sen teki:

(RH) RIEMANNIN HYPOTEESI

Zetafunktion kaikki ei-triviaalit nollakohdat ovat kompleksitason kriittisellä suoralla $z = 1/2 + iy$.

Korostettakoon, että kyseessä on hypoteesi, jonka Bernhard Riemann esitti vuonna 1859. Tähän päivään mennessä sitä ei ole saatu todistetuksi, mutta empiiristä evidenssiä on kyllä kertynyt runsaasti. Kaikki löydetty zetafunktion nollakohdat (ja niitä on löydetty miljoonia) ovat kaikki olleet kriittisellä suoralla.

Huomautus: Aiemmin tässä muistiossa esitetyt Riemannin hypoteesin versiot ovat olleet pikemminkin hypoteesin seuraamuksia, jotka liittyvät alkulukujen jakautumiseen luonnollisten lukujen jonossa eli funktioihin $\pi(x)$ ja $\psi(x)$ ja niiden approksimaatioihin. Täsmennetyt hypoteesin (RH) avulla voimme nyt olennaisesti tarkentaa näiden funktioiden approksimaatioita ja päätyä aivan eksakteihin lausekkeisiin näille alkulukujen esiintymistiheyttä kuvaaville funktioille.

9. Eksplisiittinen ja eksakti lauseke funktiolle $\psi(x)$

Edellä kappaleessa 3 esitimme vuonna 1896 todistetun alkulukulauseen, joka antaa likimääräisen laskulausekkeen $L(x) = x/\ln x$ funktiolle $\pi(x)$, joka ilmaisee välillä $1 \leq p \leq x$ esiintyvien alkulukujen p määrän. Kappaleessa 4 esitimme Gaussin tarkemman lausekkeen $Li(x)$, jota kutsutaan logaritmiseksi integraaliksi. Vertailutaulukosta 4.1 näimme, että $Li(x)$ oli olennaisesti tarkempi (jopa neliöjuuritarkka) approksimaatio funktiolle $\pi(x)$ kuin $L(x)$, joka oli vain ”hyvä” approksimaatio.

Edellä kappaleessa 3 määrittelimme myös toisen hieman mutkikkaamman alkulukulaskurin $\psi(x)$, jota kutsutaan myös *logaritmiseksi alkulukupotenssien laskuriksi* tai *Chebyshevin laskurifunktioksi*.

Esimerkki palauttakoon mieleen funktion $\psi(x)$ määritelmän (tapauksessa $x = 14$):

$$\begin{aligned}\psi(14) &= T_2(14) \cdot \ln 2 + T_3(14) \cdot \ln 3 + T_5(14) \cdot \ln 5 + T_7(14) \cdot \ln 7 + T_{11}(14) \cdot \ln 11 + T_{13}(14) \cdot \ln 13, \\ &= 3 \cdot \ln 2 + 2 \cdot \ln 3 + 1 \cdot \ln 5 + 1 \cdot \ln 7 + 1 \cdot \ln 11 + 1 \cdot \ln 13, \\ &\approx 12,8.\end{aligned}$$

Tässä $T_p(14)$ ilmaisee kuinka monta alkuluvun p potenssia tulee vastaan juostaessa läpi luvut 2, 3, ..., 14. Esimerkiksi $T_2(14) = 3$, koska potenssit $2^1, 2^2$ ja 2^3 tulevat tuolla välillä vastaan. Chebyshevin laskurifunktion arvo $\psi(14)$ on sitten termien $T_p(14) \cdot \ln p$ summa, kun p käy läpi kaikki alkuluvut lukuun 14 saakka. Muistamme myös, että $\ln p$ tarkoittaa luvun p luonnollista (eli e -kantaista) logaritmia.

Kappaleessa 3 selvisi, että laskurien π ja ψ välillä vallitsee likimääräinen yhteys $\psi(x) \approx \pi(x) \cdot \ln x$ ja toisaalta empiirisen aineiston perusteella on $\psi(x) \approx x$. Yhdistämällä nämä kaksi havaintoa saatiin kappaleessa 3 esitetty (vuonna 1896 todistettu) alkulukulause, jonka mukaan $\pi(x) \approx x/\ln x$ ja tämä approksimaatio on ”hyvä”.

Mutta miten tämä liittyy kompleksiseen zetafunktiioon ja sen ei-triviaaleja nollakohtia koskevaan Riemannin hypoteesiin (RH)? No siten, että eräänä Riemannin hypoteesin seurauksena saadaan seuraava **eksakti** lauseke Chebyshevin alkulukupotenssien laskurifunktiolle $\psi(x)$ (missä x on reaalityö)

$$(9.1) \quad \psi(x) = x - \ln(2\pi) - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho}.$$

Tässä viimeisenä terminä oleva summa S voidaan hajottaa kahteen osaan

$$(9.2) \quad S = \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} = \sum_t \frac{x^t}{t} + \sum_u \frac{x^u}{u} = S_1 + S_2,$$

missä koko summan S summausindeksi ρ (roo) juoksee läpi *kaikki* zetafunktion nollakohdat sekä triviaalit reaaliset nollakohdat $t = -2, -4, -6, \dots$ että ei-triviaalit u , jotka ovat kriittisellä kaistalla olevia kompleksilukuja. Kumpiakin on äärettömän monta. Tiedetään, että molemmat summat S_1 ja S_2 suppenevat kohti äärellistä reaalityötä. Edellisen t -summan osalta se on selvää, koska sen termit ovatkin

reaalilukuja. Mutta myös u -summa suppenee kohti reaalilukua, **mikäli Riemannin hypoteesi (RH) on tosi** eli jos kaikki u :n arvot ovat muotoa $u = 1/2 + iy$ (sijaitsevat kriittisellä suoralla).

Ensimmäinen summa S_1 voidaan jopa laskea tarkasti ja tulokseksi saadaan

$$(9.3) \quad S_1 = \sum_t \frac{x^t}{t} = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)$$

Suurilla x :n arvoilla tämä summa on likimain nolla (esim. jo arvolla $x = 100$ on $S_1 \approx 0,00005$), joten summan S_1 osuus voidaan huoletta jättää pois ψ -funktion laskukaavassa (9.1). Jäljelle jää kaava

$$(9.4) \quad \psi(x) = x - \ln(2\pi) - \sum_u \frac{x^u}{u},$$

jossa summausindeksi u juoksee läpi kaikki zetafunktion ei-triviaalit nollakohdat. Kaavaa voidaan edelleen yksinkertaistaa, koska vakiotermi $\ln(2\pi) \approx 1,84$ on vähäinen, silloin kun käsitellään muuttujan suuria x :n arvoja. Näin ψ -funktion eksplisiittinen laskukaava lyhenee likiarvomuotoon

$$(9.5) \quad \psi(x) \approx x - \sum_u \frac{x^u}{u},$$

jossa siis virhe on pienempi kuin 1,85 yksikköä.

Funktion $\psi(x)$ eksaktista lausekkeesta (9.1) saadaan erinäisten kiemuroiden kautta eksakti lauseke myös eksakti lauseke alkuperäiselle laskurifunktiollemme $\pi(x)$, joka ilmoittaa alkulukujen tarkan lukumäärän reaalilukuvälillä $[0, x]$. Tämä lauseke on melko monimutkainen ja sen käyttö vaatii koneellista laskentakapasiteettia.

LÄHTEITÄ

Galois-kerhon Riemann-ekskursiolla 2018-2019 olen pääosin käyttänyt lähdemateriaalina kahta melko tuoretta kirjasta:

[1] *Roland van der Veen & Jan van de Graats: The Riemann Hypothesis*, MAA Press 2015 (144 sivua).

[2] *Barry Mazur & William Stein: Prime Numbers and the Riemann Hypothesis*, Cambridge University Press 2017 (142 sivua).

Hollantilaisten tekijöiden kirjanen [1] on laadittu varta vasten materiaaliksi Amsterdamin yliopiston lukiolaisille järjestämän neljän viikon pituisen kesäkurssin sisällöksi. Kirjasessa on myös runsaasti harjoitustehtäviä ja (ja kirjan lopussa) niiden ratkaisut.

Kirjanen [2] on kahden maailman matemaatikkojen eturiviin kuuluvan (amerikkalaisen) huolellisesti laatima suppea esitys, joka oman käsitykseni mukaan on parasta mitä aiheesta on kirjoitettu ammattilaisten pienen piirin ulkopuolisille lukijoille. Sekään ei vaadi lukiomatematiikkaa ylittäviä esitietoja. Mitään pikalukemistoja nämä pienet kirjaset eivät tietenkään ole. Tekstiä joutuu sulattelemaan ja kertailemaankin pienissä paloissa.

Minulla on molemmat em. kirjaset ja annan niitä kiinnostuneille lainaksi. Kysy vain!

Riemannin hypoteesista löytyy tietysti runsaasti aineistoa verkosta. Englanninkielisen Wikipedian artikkeli *Riemann hypothesis* on erinomainen ja monipuolinen yleiskatsaus aiheesta. Siinä tosin esitellään pääasiassa hypoteesiin liittyviä aikojen saatossa löydettyjä tutkimustuloksia, yleensä ilman perusteluja, eikä vasta-alkaja saa siitä syvennystä ymmärrykseensä.

Riemannin hypoteesi on yksi seitsemästä ongelmasta, joiden ratkaisemisesta amerikkalainen Clay Mathematics Institute on luvannut miljoonan dollarin palkinnon. Instituutin verkkosivut löytyvät osoitteesta: <https://www.claymath.org/millennium-problems>. Klikkaamalla *Riemann hypothesis* -linkkiä pääsee lukemaan *Official Problem Description* -kuvauksen sekä paria muutakin aiheeseen liittyvää mielenkiintoista tekstiä, mm. Riemannin alkuperäisen artikkelin vuodelta 1859 (saksankielinen originaali ja sen englanninnos).

Clayn sivuilta löytyvät tietysti myös kilpailuohjeet palkinnon tavoittelijoille¹⁹. Onnea matkaan!

¹⁹ Verkosta löytyy myös runsaasti ilmoituksia ratkaisuista, mutta yhtään oikeaa ei ole vielä ilmaantunut (7.5.2019).

LIITE 1

Eulerin tulokaavan (6.1) todistus

$$\text{VÄITE: } \zeta(x) = \left(\frac{1}{1-2^{-x}}\right) \cdot \left(\frac{1}{1-3^{-x}}\right) \cdot \left(\frac{1}{1-5^{-x}}\right) \cdot \left(\frac{1}{1-7^{-x}}\right) \cdot \dots = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(\frac{1}{1-p^{-x}}\right)$$

TODISTUS:

Zetafunktion määritelmän mukaan on

$$(1) \quad \zeta(x) = 1 + 2^{-x} + 3^{-x} + 4^{-x} + 5^{-x} + \dots$$

Muokkaamme yhtälöä (1) vaiheittain siten, että kussakin vaiheessa oikealta puolelta poistetaan potenssit, joiden kantaluku on jaollinen tietyllä alkuluvulla.

1. Poistetaan kaikki alkuluvulla 2 jaolliset kantaluvat

Kerrotaan yhtälön (1) molemmat puolet tekijällä 2^{-x} jolloin saadaan yhtälö

$$(2) \quad 2^{-x} \cdot \zeta(x) = 2^{-x} + 4^{-x} + 6^{-x} + 8^{-x} + 10^{-x} + \dots$$

Vähennetään yhtälöstä (1) yhtälö (2) ja otetaan vasemmalla puolella yhteinen tekijä $\zeta(x)$ eteen. Saadaan

$$(3) \quad \zeta(x)(1 - 2^{-x}) = 1 + 3^{-x} + 5^{-x} + 7^{-x} + 9^{-x} + 11^{-x} + 13^{-x} + \dots,$$

missä oikealla puolella kaikki 2:lla jaollisten kantalukujen potenssit ovat kumoutuneet.

2. Poistetaan kaikki alkuluvulla 3 jaolliset kantaluvat

Nyt kerrotaan yhtälö (3) tekijällä 3^{-x} , jolloin saadaan

$$(4) \quad 3^{-x} \cdot \zeta(x)(1 - 2^{-x}) = 3^{-x} + 9^{-x} + 15^{-x} + 21^{-x} + 27^{-x} + \dots$$

ja vähennetään yhtälöstä (3) yhtälö (4) ja otetaan vasemmalla puolella taas yhteinen tekijä $\zeta(x)$. Saadaan

$$(5) \quad \zeta(x)(1 - 2^{-x})(1 - 3^{-x}) = 1 + 5^{-x} + 7^{-x} + 11^{-x} + 13^{-x} + \dots,$$

missä oikealla puolella kaikki 3:lla jaollisten kantalukujen potenssit ovat poistuneet.

3. Poistetaan kaikki alkuluvulla 5 jaolliset kantaluvat

Nyt kerrotaan yhtälö (5) tekijällä 5^{-x} , jolloin saadaan

$$(6) \quad 5^{-x} \cdot \zeta(x)(1 - 2^{-x})(1 - 3^{-x}) = 1 + 5^{-x} + 7^{-x} + 11^{-x} + 13^{-x} + \dots,$$

ja vähennetään yhtälöstä (5) yhtälö (6) ja otetaan vasemmalla puolella taas yhteinen tekijä $\zeta(x)$. Saadaan

$$(7) \quad \zeta(x)(1 - 2^{-x})(1 - 3^{-x})(1 - 5^{-x}) = 1 + 7^{-x} + 11^{-x} + 13^{-x} + \dots,$$

missä oikealla puolella kaikki alkuluvulla 5 jaollisten kantalukujen potenssit ovat poistuneet.

Kun tätä poistoprosessia jatketaan päättymättä, niin yhtälön vasemmalle puolelle muodostuu päättymätön tulo, jossa ensimmäinen tekijä on $\zeta(x)$ ja sen jälkeen jokaiselle alkuluvulle p tekijä $(1 - p^{-x})$. Vasen puoli lähestyy siis päättymätöntä tuloa

$$(8) \quad \zeta(x)(1 - 2^{-x})(1 - 3^{-x})(1 - 5^{-x})(1 - 7^{-x})(1 - 11^{-x})(1 - 13^{-x})(1 - 17^{-x}) \dots,$$

jossa $\zeta(x)$ on kerrottu kaikilla tyyppiä $(1 - p^{-x})$ olevilla tekijöillä, kun p käy läpi kaikki alkuluvut.

Oikealta puolelta taas häviävät kaikki muut termit paitsi 1. Päädytään siis yhtälöön

$$(9) \quad \zeta(x)(1 - 2^{-x})(1 - 3^{-x})(1 - 5^{-x})(1 - 7^{-x})(1 - 11^{-x})(1 - 13^{-x}) \dots = 1.$$

Jakamalla tämä yhtälö puolittain kaikilla tekijöillä $(1 - p^{-x})$ saamme

$$(10) \quad \zeta(x) = (1 - 2^{-x})^{-1}(1 - 3^{-x})^{-1}(1 - 5^{-x})^{-1}(1 - 7^{-x})^{-1}(1 - 11^{-x})^{-1}(1 - 13^{-x})^{-1} \\ = \left(\frac{1}{1 - 2^{-x}}\right) \cdot \left(\frac{1}{1 - 3^{-x}}\right) \cdot \left(\frac{1}{1 - 5^{-x}}\right) \cdot \left(\frac{1}{1 - 7^{-x}}\right) \cdot \left(\frac{1}{1 - 11^{-x}}\right) \cdot \left(\frac{1}{1 - 13^{-x}}\right) \cdot \dots$$

Tämän tuloksen voimme kirjoittaa lyhyemmin käyttämällä tulomerkintää

$$(11) \quad \zeta(x) = \prod_{p \in P} \left(\frac{1}{1 - p^{-x}}\right),$$

missä merkintä $p \in P$ tarkoittaa, että p juoksee läpi koko alkulukujoukon $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$.

Näin väite on todistettu.

MOT

LIITE 2

Zetafunktion arvon $\zeta(2)$ laskeminen geometrisesti²⁰

TEHTÄVÄ: Laske $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$

Ratkaisu:

Merkitään

$$S = \zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Silloin on

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^2} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i)^2}$$

eli

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^2} + \frac{1}{4} S,$$

jolloin

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} S &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^2} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2i+1} \cdot \frac{1}{2i+1} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^1 x^{2i} dx \cdot \int_0^1 y^{2i} dy \quad \left(\text{koska } \int_0^1 x^{2i} dx = \frac{1}{2i+1} \right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 (xy)^{2i} dx dy = \int_0^1 \int_0^1 \left[\sum_{i=0}^{\infty} (xy)^{2i} \right] dx dy \quad (\text{hakasuluissa on geometrinen summa}) \\ &= \iint_N \left(\frac{1}{1-(xy)^2} \right) dA. \quad (\text{saatiin geom. summakaavan avulla}) \end{aligned}$$

Saamme siis summalle $S = \zeta(2)$ pintaintegraalilausekkeen

$$(L2.1) \quad S = \frac{4}{3} \iint_N \left(\frac{1}{1-(xy)^2} \right) dA,$$

missä N tarkoittaa xy -tason yksikköneliötä $[0,1] \times [0,1]$ ja $dA = dx dy$.

Integraalin laskemiseksi vaihdetaan integroimismuuttujat x, y uusiksi muuttujiksi u, v sijoituksella

²⁰ Tämä laskutavan keksi italialais-amerikkalainen Antonio Calabi (s. 1923)

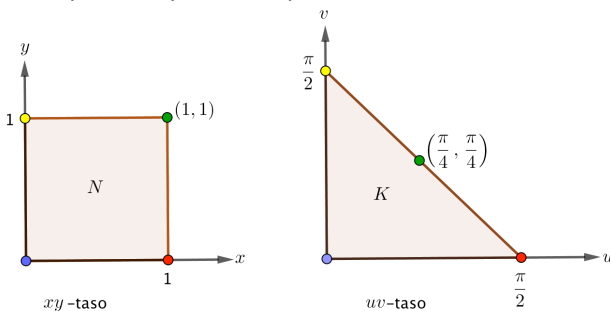
$$(L2.2) \quad \begin{cases} x = \sin u / \cos v \\ y = \sin v / \cos u \end{cases},$$

jolloin xy -tason yksikköneliön N kärkipisteitä vastaavat uv -tason pisteet seuraavasti

$$(x = 0, y = 0) \leftrightarrow (u = 0, v = 0) \qquad (x = 1, y = 0) \leftrightarrow (u = \pi/2, v = 0)$$

$$(x = 1, y = 1) \leftrightarrow (u = \pi/4, v = \pi/4) \qquad (x = 0, y = 1) \leftrightarrow (u = 0, v = \pi/2)$$

Merkitsemällä nämä pisteet uv -koordinaattitasoon näemme, että xy -tason yksikköneliötä N vastaa uv -tasossa suorakulmainen kolmioalue K , jonka kärkipisteet ovat $(0, 0)$; $(\pi/2, 0)$ ja $(0, \pi/2)$. Jos tämän uv -tason kolmion alueelta valitaan mielivaltainen piste (u, v) , niin on helppo todistaa, että muunnoskaavan (L2.1) mukaan vastaava xy -tason piste $(x, y) = (\sin u / \cos v, \sin v / \cos u)$ sijaitsee yksikköneliössä N . Sama pätee myös toisin päin. Alla oleva kuvio havainnollistaa tilannetta.



KUVIO L2.1. Integroimisalueet xy - ja uv -koordinaatistoissa. Samanväriset pisteet vastaavat toisiaan koordinaattimuunnoksessa $(x, y) = (\sin u / \cos v, \sin v / \cos u)$.

Seuraavaksi kirjoitamme pinta-integraalin (L2.1) uusien koordinaattien u, v avulla. Tällöin integrointialueeksi tulee xy -tason neliön sijasta uv -tason kolmio K . Pintaintegraalien muunnossääntöjen mukaan integroitava funktio säilyy muuttumattomana eli samana kuin yhtälössä (L2.1), mutta xy -tason pinta-alkio dA vaihtuu uv -tason pinta-alkioksi $J(x, y; u, v) \cdot dA$, joten saamme

$$(L2.3) \quad S = \frac{4}{3} \iint_K \left(\frac{1}{1 - (xy)^2} \right) \cdot J(x, y; u, v) \cdot dA,$$

Tässä $J(x, y; u, v)$ on käytetyn koordinaattimuunnoksen osittaisderivaatoista muodostettu determinantti²¹ (ns. *Jacobin determinantti*)

$$J(x, y; u, v) = \begin{vmatrix} \partial x / \partial u & \partial x / \partial v \\ \partial y / \partial u & \partial y / \partial v \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}$$

Muunnoskaavoista (L2.2) saadaan osittaisderivoimalla $J(x, y; u, v) = 1 - (xy)^2$. Niinpä yhtälö (L2.3) sievenee muotoon

$$(L2.4) \quad S = \frac{4}{3} \iint_K 1 \, dA = \frac{4}{3} A.$$

Tässä siis A on koko uv -integrointialueen eli kolmion K pinta-ala $(\pi/2) \cdot (\pi/2) / 2 = \pi^2 / 8$.

Päädymme siis tulokseen

$$(L2.5) \quad S = \zeta(2) = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}.$$

²¹ Jacobin determinantti J korjaa pinta-alkion $dA = dx \, dy$ vastaamaan uusia koordinaatteja.